

Adran 2: Hafaliadau trigonometrig

Nodiadau ac Enghreifftiau

Yn yr adran hon fe fyddwch yn dysgu sut i ddatrys hafaliadau trigonometrig.

Mae'r nodiadau hyn yn cynnwys isadrannau ar

- [Prif werthoedd](#)
- [Datrys hafaliadau trigonometrig syml](#)
- [Enghreifftiau mwy cymhleth o hafaliadau trigonometrig.](#)

Prif werthoedd

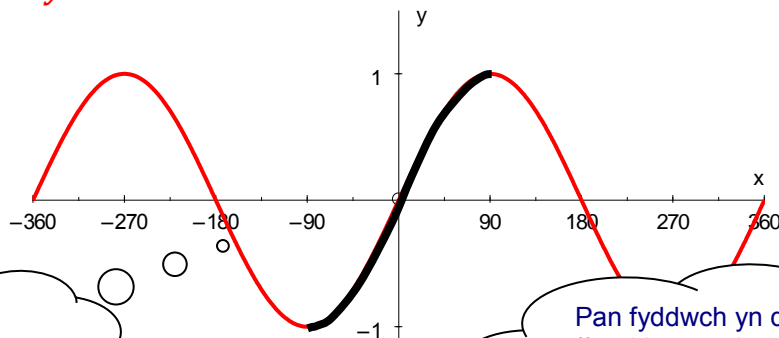
Mae gan hafaliad fel $\sin \theta = \frac{1}{2}$ nifer anfeidraidd o wreiddiau.

Fe fydd eich cyfrifiannell yn rhoi un gwreiddyn yn unig – y **prif werth**.

Fe fedrwch ddarganfod hwn drwy wasgu $\arcsin 0.5$ (neu $\sin^{-1} 0.5$ neu $\text{inv sin } 0.5$) ar eich cyfrifiannell. Gwiriwch eich bod yn cael yr ateb 30° .

Medrwyh ddarganfod wreiddiau eraill drwy edrych ar gymesuredd y graff priodol.

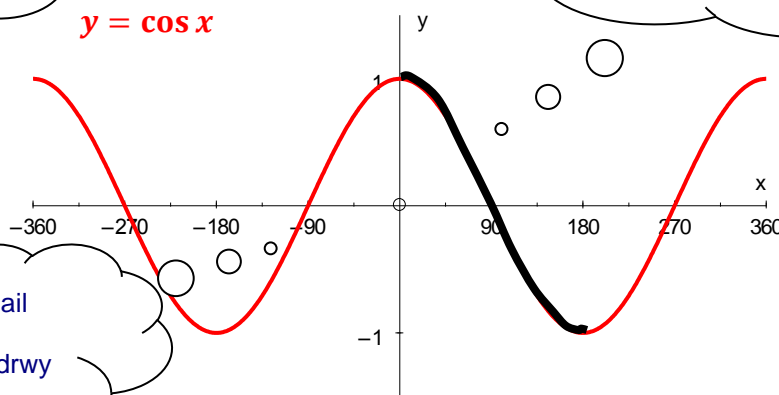
$y = \sin x$



Gellir darganfod ail wreiddyn o fewn cylchdro o 360° drwy $180^\circ - \theta$

Pan fyddwch yn defnyddio'r ffwythiant cosin gwrthdro, fe fydd eich cyfrifiannell bob amser yn rhoi ateb o 0° i 180° i chi.

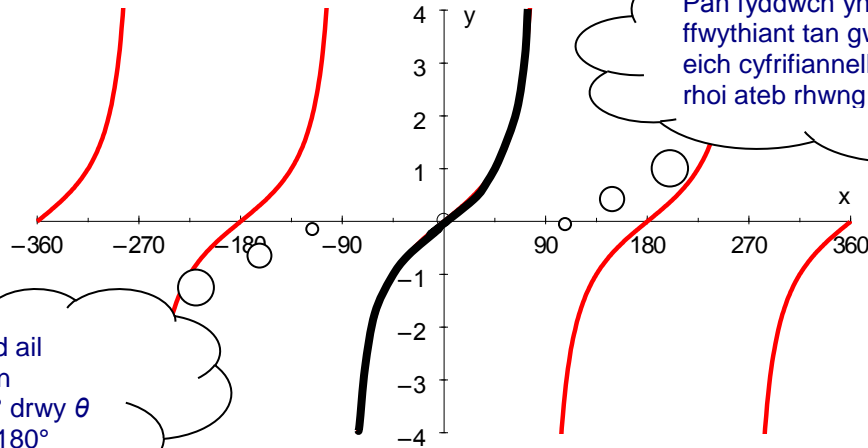
$y = \cos x$



Gellir darganfod ail wreiddyn o fewn cylchdro o 360° drwy $360^\circ - \theta$

CBAC UG Mathemateg Trigonometreg 2 Nodiadau ac Enghreifftiau

$$y = \tan x$$



Pan fyddwch yn defnyddio'r ffwythiant tan gwrthdro, fe fydd eich cyfrifiannell bob amser yn rhoi ateb rhwng -90° a 90° .

Gellir darganfod ail wreiddyn o fewn cylchdro o 360° drwy $\theta + 180^\circ$ neu $\theta - 180^\circ$

Fel arall, medrwcch ddefnyddio'r diagram pedrannau i ddarganfod gwreiddiau eraill, drwy feddwl ym mha bedrannau fydd y gwreiddiau.

Datrys hafaliadau trigonometrig syml

Oherwydd bod nifer anfeidraidd o wreiddiau i hafaliad trigonometrig byddwn ond yn gorfod darganfod rhai ohonynt! Bydd unrhyw gwestiwn ar y lefel hon sy'n gofyn i chi ddatrys hafaliad trigonometrig hefyd yn nodi cyfwng neu amrediad o werthoedd y mae'r gwreiddiau gofynnol o'i fewn, e.e. efallai bydd angen i chi ddatrys $\tan \theta = 2$ ar gyfer $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

Byddwch ond yn medru datrys yn uniongyrchol hafaliadau fel $\sin \theta = \frac{1}{2}$ neu $\cos \theta = \frac{1}{4}$ neu $\tan \theta = -2$. Dyma enghraifft.



Enghraifft 1

Datrysych $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ar gyfer $-360^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.



Datrysiad

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

Fe fydd ail wreiddyn yn yr ail bedrant.

Mae $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ hefyd yn wreiddyn.

Gan fod cyfnod $y = \sin \theta$ yn 360° gellir darganfod unrhyw wreiddiau eraill drwy adio/tynnu 360° i'r/o'r ddau wreiddyn hyn.

Felly'r gwreiddiau eraill yw:

$$\begin{aligned} \text{a} \quad & 60^\circ - 360^\circ = -300^\circ \\ & 120^\circ - 360^\circ = -240^\circ \end{aligned}$$

Felly gwerthoedd θ sy'n rhoi $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ yw $-300^\circ, -240^\circ, 60^\circ, 120^\circ$.

CBAC UG Mathemateg Trigonometreg 2 Nodiadau ac Enghreifftiau

Bydd gan bron bob hafaliad o'r math yn Enghraifft 1 dau wreiddyn yn yr amrediad $0^\circ \leq x < 360^\circ$.

Fodd bynnag nid yw hwn yn wir i bob hafaliad trigonometrig. Tybiwch, er enghraifft, eich bod am ddatrys yr hafaliad $\sin 2x = 0.5$ yn yr amrediad $0^\circ \leq x < 360^\circ$. Medrwyd ddarganfod bod $2x = 30^\circ$ neu 150° , sy'n golygu bod $x = 15^\circ$ neu 75° . Fodd bynnag, mae dau wreiddyn pellach yn yr amrediad $0^\circ \leq x < 360^\circ$, a rhoddir gan $2x = 30^\circ + 360^\circ = 390^\circ \Rightarrow x = 195^\circ$, a $2x = 150^\circ + 360^\circ = 510^\circ \Rightarrow x = 255^\circ$. Felly mae pedwar gwreiddyn: $x = 15^\circ, 75^\circ, 195^\circ, 255^\circ$.

Golyga hyn, os ydych yn datrys hafaliad o'r ffurf $\sin nx = k$, mae angen i chi addasu'r amrediad o werthoedd ar gyfer x ble fyddwch yn chwilio am y gwreiddiau cychwynol.



Enghraifft 2

Datrysych bob un o'r hafaliadau canlynol yn yr amrediad a nodwyd:

- (i) $\tan 3x = 1$ ar gyfer $0 \leq x < 360^\circ$
- (ii) $\cos(2x + 40^\circ) = 0.5$ ar gyfer $-180^\circ < x \leq 180^\circ$



Datrysiaid

- (i) $\tan 3x = 1$
 $3x = 45^\circ, 225^\circ, 405^\circ, 585^\circ, 765^\circ, 945^\circ$
 $x = 15^\circ, 75^\circ, 135^\circ, 195^\circ, 255^\circ, 315^\circ$
- (ii) $\cos(2x + 40^\circ) = 0.5$
 $2x + 40^\circ = -300^\circ, -60^\circ, 60^\circ, 300^\circ$
 $2x = -340^\circ, -100^\circ, 20^\circ, 260^\circ$
 $x = -170^\circ, -50^\circ, 10^\circ, 130^\circ$

Mae angen chwilio am wreiddiau ar gyfer $3x$ o fewn yr amrediad 0° i 1080°

Rhaid chwilio rhwng ffin isaf yr amrediad $-180^\circ \times 2 + 40^\circ = -320^\circ$, a'r ffin uchaf $180^\circ \times 2 + 40^\circ = 400^\circ$

Enghreifftiau mwy cymhleth o hafaliadau trigonometrig

Rhaid trin hafaliadau mwy cymhleth yn algebraidd cyn y gellir eu datrys. Mae nifer o dechnegau gellir eu defnyddio:

1. Ail-drefnwch yr hafalid i wneud $\cos \theta$, $\sin \theta$ neu $\tan \theta$ yn destun.
2. Gwiriwch os yw'r hafaliad yn ffactorio i roi dau (neu fwy) o hafaliadau sy'n cynnwys un ffwythiant trigonometrig yn unig (gweler Enghraifft 3). Os yw'n hafaliad cwadratig yn naill ai $\sin \theta$, $\cos \theta$, neu $\tan \theta$ gellir ei ffactorio neu ei ddatrys drwy ddefnyddio'r fformwla i ddatrys hafaliadau cwadratig (gweler Enghraifft 4).

CBAC UG Mathemateg Trigonometreg 2 Nodiadau ac Enghreifftiau

- Os yw'r hafaliad yn cynnwys $\sin \theta$ a $\cos \theta$ yn unig (a dim pwerau), gwiriwch os gellir defnyddio'r unfathiant $\tan \theta \equiv \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ (gweler Enghraifft 5).
- Os yw'r hafaliad yn cynnwys cymysgedd o ffwythiannau trigonometrig (e.e. $\cos^2 \theta$ a $\sin \theta$) yna efallai bydd angen defnyddio'r unfathiant $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \equiv 1$ i'w wneud yn gwadratig yn naill ai $\sin \theta$, $\cos \theta$, neu $\tan \theta$ (gweler Enghraifft 6).



Enghraifft 3

Datrysych $2 \cos \theta \sin \theta + \cos \theta = 0$ ar gyfer $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

Datrysiaid

Gellir ffactorio $2 \cos \theta \sin \theta + \cos \theta = 0$ gan fod $\cos \theta$ yn ffactor cyffredin ar yr ochr chwith.

$$\text{Ffactoriwch: } \cos \theta (2 \sin \theta + 1) = 0$$

$$\text{Felly naill ai } \cos \theta = 0 \text{ neu } 2 \sin \theta + 1 = 0$$

$$\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

mae $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$ hefyd yn wreiddyn.

$$2 \sin \theta + 1 = 0 \Rightarrow \sin \theta = -\frac{1}{2}$$

Mae gan hwn wreiddiau yn y trydydd a phedwerydd pedrant.

Y gwreiddiau yw $180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$ a $360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$.

Felly gwerthoedd θ sy'n bodloni $2 \cos \theta \sin \theta + \cos \theta = 0$ yw 90° , 210° , 270° a 330° .

Mae'n anghywir i rhannu drwodd gyda $\cos \theta$ oherwydd byddwch yn colli'r gwreiddiau i $\cos \theta = 0$.

Yn Enghraifft 4 mae angen datrys hafaliad cwadratig.

Enghraifft 4

Datrysych $2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta = 2$ ar gyfer $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

Datrysiaid

Mae $2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta = 2$ yn hafaliad cwadratig yn $\cos \theta$

Ail-drefnwch yr hafaliad: $2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 2 = 0$

$$\text{Boed } \cos \theta = x: \quad 2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\text{Ffactoriwch: } (2x - 1)(x + 2) = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ neu } x = -2 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ neu } \cos \theta = -2$$

nid oes gan $\cos \theta = -2$ wreiddiau real.

$$\text{Felly mae angen datrys } \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = 60^\circ$$

Mae gwreiddyn yn y 4^{ydd} pedrant hefyd, felly mae $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ hefyd yn wreiddyn.

Medrwch ddefnyddio x yn lle $\cos \theta$ er mwyn symleiddio pethau, neu ffactorio'n syth i gael:
 $(2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 2) = 0$
 ac yna datrys.



CBAC UG Mathemateg Trigonometreg 2 Nodiadau ac Enghreifftiau

Felly gwerthoedd θ sy'n bodloni $2\cos^2\theta + 3\cos\theta = 2$ yw 60° a 300° .

Yn yr enghraifft nesaf mae angen defnyddio'r unfathiant $\tan\theta \equiv \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.



Enghraifft 5

Datrysych $\sin\theta - 2\cos\theta = 0$ ar gyfer $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

Datrysiad

Mae angen ail-drefnu'r hafaliad

$$\sin\theta - 2\cos\theta = 0$$

Rannu â $\cos\theta$: $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - 2 = 0$

Gan fod $\tan\theta \equiv \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$: $\tan\theta - 2 = 0$

$$\Rightarrow \tan\theta = 2$$

$$\Rightarrow \theta = 63.4^\circ \text{ i 1 ll.d.}$$

Mae gwreiddyn yn y 3^{ydd} pedrant hefyd.

Felly mae $63.4^\circ + 180^\circ = 243.4^\circ$ hefyd yn wreiddyn.

Mae'n ddiogel i rannu â $\cos\theta$ oherwydd ni all fod yn hafal i 0. Petai'n sero yna byddai'n rhaid i $\sin\theta$ fod yn 0 hefyd ac mae $\cos\theta$ a $\sin\theta$ byth yn 0 ar gyfer yr un gwerth o θ .

Felly gwerthoedd θ sy'n bodloni $\sin\theta - 2\cos\theta = 0$ yw 63.4° a 243.4° i 1 ll.d.

Yn yr enghraifft nesaf mae angen defnyddio'r unfathiant $\sin^2\theta + \cos^2\theta \equiv 1$.



Enghraifft 6

Datrysych $\sin^2x + \sin x = \cos^2x$ ar gyfer $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

Datrysiad

Mae ail-drefnu'r unfathiant $\sin^2\theta + \cos^2\theta \equiv 1$

yn rhoi: $\cos^2x \equiv 1 - \sin^2x$ ①

Bydd amnewid ① i mewn i'r hafaliad $\sin^2x + \sin x = \cos^2x$ yn rhoi:

$$\sin^2x + \sin x = 1 - \sin^2x$$

Mae hwn yn gwadratig yn $\sin x$.

Ail-drefnu: $2\sin^2x + \sin x - 1 = 0$

Mae hwn yn ffactorio i gael: $(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

Felly, naill ai: $2\sin x - 1 = 0$ neu $\sin x + 1 = 0$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \sin x = -1$$

$$\Rightarrow x = 30^\circ \text{ neu } 150^\circ \quad \Rightarrow x = 270^\circ$$

Felly gwreiddiau'r hafaliad $\sin^2x + \sin x = \cos^2x$ yw $x = 30^\circ, 150^\circ$ or 270°